統計的な推測(1)

ここでは,

- 確率変数，確率分布
- 期待値，分散，標準偏差
- 確率変数の変換

について理解していきましょう。

基本１　確率変数と確率分布

(1)　確率変数

X が x_1，x_2，$\cdots$，x_n のいずれかの値をとる変数であり，X が 1 つの値 x_k をとる確率 $P(X = x_k)$ が定まるとき，X を確率変数という。

(2)　確率分布

$P(X = x_k) = p_k$ $(k = 1，2，\cdots，n)$ とすると，

$$p_1 \geqq 0，p_2 \geqq 0，\cdots，p_n \geqq 0 \qquad p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$

が成り立つ。また，x_k と p_k の対応関係は，次の表のようになる。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

この対応関係を，X の確率分布といい，確率変数 X はこの分布に従うという。

例　4 枚の硬貨を投げるとき，表の出る枚数とその確率をまとめると，次のようになる。

表の枚数	0	1	2	3	4	計
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

この例において，確率変数は「表の枚数」で，確率分布は「この表自体」です。

基本 2　確率変数の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X が次の分布に従うとする。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

(1)　期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ の定義

- 期待値 $E(X)$　$\cdots$　$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$
- 分散 $V(X)$　$\cdots$　$E(X) = m$ とするとき，$(X-m)^2$ の期待値。

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 p_k$$

- 標準偏差 $\sigma(X)$　$\cdots$　分散の正の平方根。$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

(2)　分散 $V(X)$ の別の計算

分散 $V(X)$ は次のように計算することもできる。

- $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

証

$\sum_{k=1}^{n} x_k p_k = m$，$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ であることに注意しておく。

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} ({x_k}^2 - 2mx_k + m^2) p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 p_k - 2m \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + m^2 \sum_{k=1}^{n} p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 p_k - 2m \cdot m + m^2 \cdot 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 p_k - m^2
\end{aligned}$$

基本 3　確率変数の変換

確率変数 X と定数 a，b に対して，$aX+b$ という確率変数を考える。

このとき，

- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $V(aX+b)=a^2V(X)$
- $\sigma(aX+b)=|\,a\,|\,\sigma(X)$

証

確率変数 X が次の分布に従うとする。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

このとき，$aX+b$ は次の分布に従う。

$aX+b$	ax_1+b	ax_2+b	$\cdots$	ax_n+b	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

したがって，

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)p_k \\ &= a\sum_{k=1}^{n}x_kp_k+b\sum_{k=1}^{n}p_k \\ &= aE(X)+b \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{k=1}^{n}\{(ax_k+b)-(aE(X)+b)\}^2p_k \\ &= a^2\sum_{k=1}^{n}(x_k-E(X))^2p_k \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

1・A

白球 7 個と黒球 3 個が入った袋から，5 個の球を同時に取り出すとき，取り出される白球の個数を X とする。

(1) 確率変数 X の確率分布を求めよ。

(2) $P(3 \leqq X \leqq 4)$ を求めよ。

2・A

2 個のさいころを投げて，同じ目が出たら $X=7$，目の数の差が 1 なら $X=3$，それ以外の場合は $X=0$ とする確率変数を定める。

(1) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(2) X の分散 $V(X)$，および，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

3・A

確率変数 X の期待値は $\dfrac{7}{2}$，分散は $\dfrac{1}{4}$ である。確率変数 Y を $Y=2X-7$ で定めるとき，Y の期待値 $E(Y)$，標準偏差 $\sigma(Y)$ をそれぞれ求めよ。

4・B

袋の中に 1 から 7 までの番号が書かれた球が 7 個入っている。ここから同時に 3 個の球を取り出す。取り出された 3 個の球に書かれている数を大きいものから順に X，Y，Z とする。X，Y，Z それぞれの期待値を求めよ。

5・B

0，1，2 のいずれかの値をとる確率変数 X の期待値および分散が，それぞれ 1，$\dfrac{1}{2}$ であるとする。このとき，X の確率分布を求めよ。

6・B

1 個のさいころを投げて出た目の数を X とするとき，X 枚の 100 円硬貨がもらえるゲームを行う。参加料が 300 円であるとき，このゲームを 1 回行って得られる利益を Y 円とする。

(1) Y を X を用いて表せ。

(2) Y の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

7・C

n 人で 1 回だけじゃんけんをする。勝者の数を X として，次の各問に答えよ。

(1) k を $1 \leqq k \leqq n$ である整数とするとき，$k{}_n\mathrm{C}_k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ を示せ。

(2) $X = k$ $(k = 1，2，\cdots，n-1)$ である確率 $P(X = k)$ を求めよ。

(3) $X = 0$，すなわち勝者が決まらない確率 $P(X = 0)$ を求めよ。

(4) X の期待値を求めよ。

8・C

n 本 (n は 3 以上の整数) のくじの中に当たりくじとはずれくじがあり，そのうちの 2 本がはずれくじである。このくじを 1 本ずつ引いていき，2 本目のはずれくじを引いたとき，それまでの当たりくじの本数を確率変数 X とする。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(3) X の分散 $V(X)$ を求めよ。

9・C

適した問題が見つかり次第，掲載します。
気長にお待ちください。