統計的な推測(3)

ここでは,

- 連続型確率変数
- 正規分布，標準正規分布
- 二項分布と正規分布

について理解していきましょう。

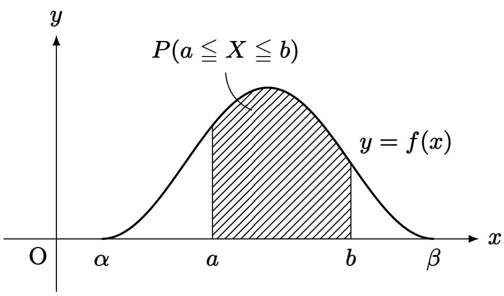
基本１　連続型確率変数

(1)　連続型確率変数

とびとびの値をとる確率変数 X を離散型確率変数というのに対し，連続的な値をとる確率変数 X を連続型確率変数という。

(2)　確率密度関数

連続型確率変数 X の確率分布を考える場合は，X に 1 つの曲線 $y=f(x)$ を対応させ，$a \leqq X \leqq b$ となる確率が，次の図の斜線部分の面積で表されるようにする。



この曲線 $y=f(x)$ を，X の分布曲線といい，関数 $f(x)$ を確率密度関数という。

X の確率密度関数 $f(x)$ には，次の性質がある。

- つねに $f(x) \geqq 0$
- $P(a \leqq X \leqq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$
- X のとり得る値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ ならば，$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 1$

(3)　連続型確率変数の期待値，分散，標準偏差

連続型確率変数 X のとり得る値が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ で，その確率密度関数が $f(x)$ であるとき，X の期待値，分散，標準偏差を次のように定める。

- 期待値　$\cdots$　$E(X) = \displaystyle\int_\alpha^\beta xf(x)\,dx$　この値を m とする。
- 分散　$\cdots$　$V(X) = \displaystyle\int_\alpha^\beta (x-m)^2 f(x)\,dx$

$$= \int_\alpha^\beta x^2 f(x)\,dx - m^2$$

- 標準偏差　$\cdots$　$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

基本 2　正規分布

(1)　正規分布

連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

で与えられるとき，X は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うという。

X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，その期待値，分散，標準偏差はそれぞれ

$$E(X) = m,\quad V(X) = \sigma^2,\quad \sigma(X) = \sigma$$

となることが知られている。

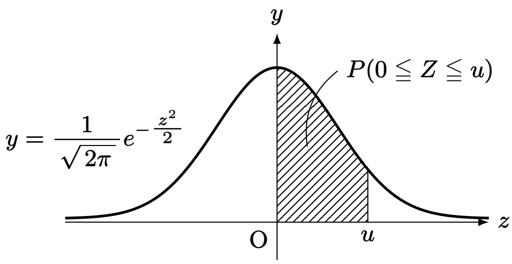
(2)　標準正規分布

平均 0，標準偏差 1 の正規分布 $N(0,\ 1)$ のことを標準正規分布という。

Z が正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，その確率密度関数は，

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

である。

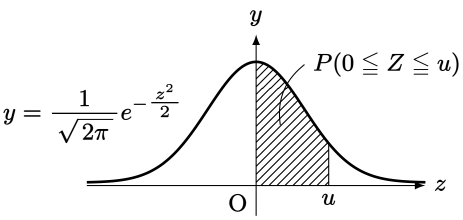


u の値に対して，$P(0 \leqq Z \leqq u)$ の値をまとめたものが，次のページの表である。

(3)　正規分布の標準化

正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従う確率変数 X に対し，Z を $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ で定めると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(4) 正規分布の表



u の値に対する $P(0 \leqq Z \leqq u)$ の値をまとめると，次のようになる。

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

例えば，$u = 1.96$，$u = 2.58$ のときの値は，それぞれ表から，

- $P(0 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.4750$
- $P(0 \leqq Z \leqq 2.58) = 0.4951$

という具合に求められる。

基本 3　二項分布と正規分布

X を二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数とすると，n が大きいとき，

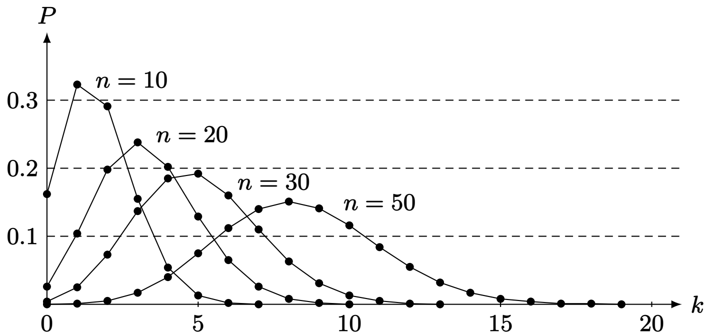
X は，近似的に正規分布 $N(np,\ npq)$ に従う。ただし，$q=1-p$ である。

例

例えば，$B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う確率変数 X について，$X=k$ となる確率

$$P(X=k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

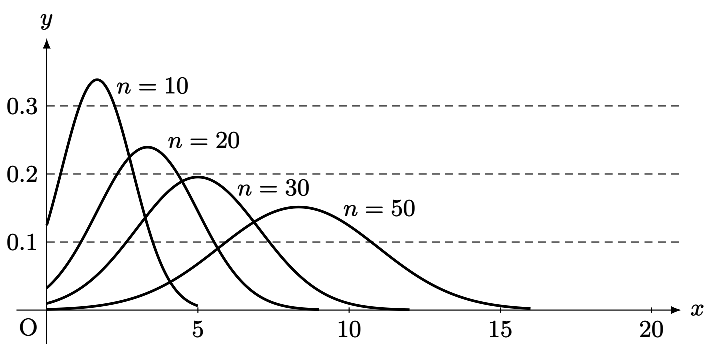
を，$n=10$，20，30，50 の各場合について計算し，それらを折れ線グラフにすると，次のようになる。



X が $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うとき，

$$E(X)=n\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}n,\ V(X)=n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}n$$

なので，正規分布 $N\left(\dfrac{1}{6}n,\ \dfrac{5}{36}n\right)$ の分布曲線を，$n=10$，20，30，50 の各場合について描くと次のようになる。



これらは近いよね，という話です。

1・A

確率変数 X のとる値 x の範囲が $0 \leqq x \leqq 4$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{2}$ で表されるとき，$P(2 \leqq X \leqq 3)$ を求めよ。

2・A

確率変数 X が正規分布 $N\left(4,\ 5^2\right)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

(1) $P(X \geqq 10)$

(2) $P(1 \leqq X \leqq 9)$

3・A

1 個のコインを 400 回投げるとき，表が出る回数を X とする。X が 210 回以上となる確率を求めよ。

4・B

確率変数 X のとり得る値の範囲が $0 \leqq X \leqq 1$ で，その確率密度関数が $f(x) = ax(x-2)$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 a の値を求めよ。

(2) X の期待値，および，分散を求めよ。

5・B

ある大学の入学試験は 1000 点満点で，全受験者 2000 名の得点の分布は，平均 450 点，標準偏差 75 点の正規分布をしていることが分かった。また，入学定員は 320 名である。

(1) 540 点以上の者は，約何名いると考えられるか。

(2) 合格最低点は，およそ何点であると考えられるか。

6・B

さいころを n 回投げるとき，1 の目が出る相対度数を R とする。$n = 500$，2000，4500 の各場合について，$P\left(\left|R - \dfrac{1}{6}\right| \leqq \dfrac{1}{60}\right)$ の値を求めよ。

7・C

連続型確率変数 X について，とり得る値の範囲を $\alpha \leqq X \leqq \beta$，確率密度関数を $f(x)$ とし，期待値を m，標準偏差を $\sigma\ (\neq 0)$ とする。

(1) 任意の正の数 k に対し，$|x-m| \geqq k\sigma$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(x-m)^2 f(x) \geqq k^2\sigma^2 f(x)$$

(2) 任意の正の数 k に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$P(|X-m| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$$

8・C

A と B が跳んだ距離を競う競技会に参加している。B が跳ぶ距離の確率分布はほぼ正規分布をなすものとする。B が最近参加した 20 回の競技会で跳んだ距離の記録 x_i ($i=1$，2，$\cdots$，20；単位は m) を調べたところ $\sum_{i=1}^{20} x_i = 107.00$，$\sum_{i=1}^{20} {x_i}^2 = 572.90$ であった。いま，先に跳んだ A の記録が 5.65 m であったとき，A が B に勝つ確率はおよそいくらか。

9・C

原点を出発して x 軸上を動く点 P がある。さいころを 1 回振って，3 以上の目が出るとき正の向きに 1 移動し，2 以下の目が出ると負の向きに 2 移動する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) さいころを 1 回振った後の点 P の座標の期待値を求めよ。

(2) さいころを 1 回振った後の点 P の座標の分散を求めよ。

(3) さいころを n 回振った後の点 P の座標が $\frac{7n}{45}$ 以上となる確率を $p(n)$ とする。

$p(162)$ を正規分布表を用いて求めよ。ただし，小数第 4 位を四捨五入せよ。